Javító vizsga tematika 11.A és 11.B osztály 2022/2023 tanév
Matematika
Összeállította: Molnár Ildikó, Kovács István

A vizsgán számológép, függvénytáblázat, toll, vonalzó, körző használható. Az ábrák készítéséhez használhat ceruzát is.
A vizsga írásbeli része 60 perc. Amennyiben a tanuló matematikából az írásbeli vizsgán nem éri el a 12%-ot, abban az esetben szóbeli vizsgát is tesz. A két vizsgán együttesen kell elérni legalább 25%-ot az elégséges érdemjegyhez.
Ha tanuló mentesítve van az írásbeli számon kérések alól, akkor csak szóbeli vizsgát tesz.
Az elégséges alsó határa 25%

I. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS
- tört kitevőjű hatvány, n. gyökvonás
- exponenciális függvény és tulajdonságai
- hatványozás és gyökvonás azonosságai és alkalmazásuk feladatokban
- logaritmus fogalma, értelmezése
- egyszerű exponenciális egyenletek
- szöveges feladatok exponenciális folyamatok alkalmazására

II. TRIGONOMETRIA
- hegyesszögek szögfüggvényei
- derékszögű háromszögekben végzett számítások
- háromszög trigonometrikus terület képlete
- szinusz és koszinusz tétel

III. KOMBINATORIKA, GRÁFOK
- gráfelméleti alapfogalmak
- fokszám, élek száma
- permutáció (ismétléses, ismétlés nélküli)
- kombináció (ismétlés nélküli)
- variáció (ismétléses, ismétlés nélküli)
- szöveges feladatok

IV. KOORDINÁTA-GEOMETRIA
- vektorok megadása a koordináta-rendszerben
- műveletek vektorokkal
- vektor hossza
- nevezetes pontok: felezőpont, háromszög súlypontja
- egyenest meghatározó adatok: irányvektor, normálvektor, hajlásszög, meredekség
- egyenes egyenlete
- egyenesek metszéspontja
- kör egyenlete

V. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS
- valószínűség fogalma, valószínűségi kísérletek
- események, műveletek eseményekkel
- valószínűség klasszikus modellje
- szöveges feladatok valószínűség-számítás témakörben

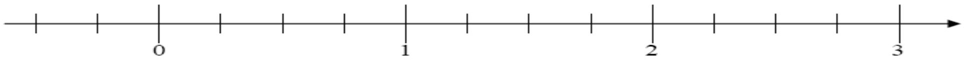
VI. SZÁMELMÉLET
- osztó, oszthatóság, prím szám, összetettszám, relatív prímek
- oszthatósági szabályok (egyszerűek és összetettek)
- legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös
- számrendszerek (átváltás 10-esbe, átváltás 10-esből)

Javasolt tankönyv: https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/OH-MAT11TB__teljes.pdf
Oldalak:
11.-18.; 25.-36.; 39.-40.; 65.-69.; 78.-96.; 98.-100.; 103.-105.; 110.-167.; 215.-244.; 285.-358.

A vizsgára javasolt a füzet anyagát átnézni!

Érettségi feladatok: Logaritmus

1. Oldja meg a pozitív valós számok halmazán a $log_{16}x = -\frac{1}{2}$ egyenletet! Jelölje a megadott számegyenesen az egyenlet megoldását!



2. Adja meg a $\log_2 \frac{1}{4}$ kifejezés pontos értékét!

3. Adja meg a $3^x=8$ egyenletet, a válaszát négy tizedesjegyre adja meg!

4. Adja meg a $\log_3 81$ kifejezés pontos értékét!

5. Újsághír: *„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”*

A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M = -4{,}42 + \frac{2}{3} \lg E$.

Ebben a képletben E a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), M pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richterskálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1{,}344 \cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel?

6. Mely valós számokra értelmezhető a $\log_2(3-x)$ kifejezés?

7. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! $2^x = 10$

8. Adja meg azt az x valós számot, amelyre $\log_2 x = 3$.

Érettségi feladatok: Exponenciális egyenletek

1. Írja fel a $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$ hatványt olyan alakban, hogy ne szerepeljen benne negatív kitevő!

2. $3^x \cdot 27 = 3^{2x+1}$

3. **a)** Ábrázolja a valós számok halmazán értelmezett $x \to 3^x$ függvényt!
b) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!
$2 \cdot 3^{x+1} = 3^3 - 9^x$

4. Oldja meg a következő egyenletet!
$9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

5. A szociológusok az országok statisztikai adatainak összehasonlításánál használják a következő tapasztalati képletet: $É = 75{,}5 - 5 \cdot 10^{(6000-G)/6090}$

A képletben az $É$ a születéskor várható átlagos élettartam években, G az ország egy főre jutó nemzeti összterméke (a GDP) reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra.

a) Mennyi volt 2005-ben a várható élettartam abban az országban, amelyben akkor a G nagysága 1090 dollár volt?

b) Mennyivel változhat ebben az országban a várható élettartam 2020-ra, ha a gazdasági előrejelzések szerint ekkorra G értéke a 2005-ös szint háromszorosára nő?

c) Egy másik országban 2005-ben a születéskor várható átlagos élettartam 68 év.
Mekkora volt ekkor ebben az országban a GDP (G) nagysága (reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra)?

6. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet! $9^{\sqrt{x}} = 3^{x-3}$

7. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet! $25^{\sqrt{x}} = 5 \cdot 5^{3\sqrt{x}}$

8. Ha az eredetileg I_0 (watt/m^2) intenzitású lézersugár x mm ($x \geq 0$) mélyre hatol egy bizonyos anyagban, akkor ebben a mélységben intenzitása $I(x) = I_0 \cdot 0{,}1^{x/6}$ (watt/m^2) lesz.
Ezt az anyagot $I_0 = 800$ (watt/m^2) intenzitású lézersugárral világítják meg.
a) Töltse ki az alábbi táblázatot! (Az intenzitásra kapott mérőszámokat egészre kerekítve adja meg!)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)$ (watt/m^2)	800						

b) Mekkora mélységben lesz a behatoló lézersugár intenzitása az eredeti érték (I_0) 15%-a? (A választ tizedmilliméterre kerekítve adja meg!)

9. Adja meg az alábbi két egyenlet valós gyökeit!
a) $5^{2x} = 625$
b) $2^y = \frac{1}{32}$

10. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
$5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$

11. Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$.

12. A kólibaktérium (hengeres) pálcika alakú, hossza átlagosan 2 mikrométer ($2 \cdot 10^{-6}$ m), átmérője 0,5 mikrométer ($5 \cdot 10^{-7}$m).
Ideális laboratóriumi körülmények között a kólibaktériumok gyorsan és folyamatosan osztódnak, számuk 15 percenként megduplázódik. Egy tápoldat kezdetben megközelítőleg 3 millió kólibaktériumot tartalmaz.
a) Hány baktérium lesz a tápoldatban 1,5 óra elteltével?
A baktériumok számát a tápoldatban t perc elteltével a $B(t) = 3\,000\,000 \cdot 2^{t/15}$ összefüggés adja meg.
b) Hány perc alatt éri el a kólibaktériumok száma a tápoldatban a 600 milliót?
Válaszát egészre kerekítve adja meg!

13. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán! $9^{x+1} - 7 \cdot 9^x = 54$

Érettségi feladatok: Trigonometria

Derékszögű háromszög

1. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 5 cm, a szára 6 cm hosszú. Hány fokosak a háromszög alapon fekvő szögei?
A szögek nagyságát egész fokra kerekítve adja meg! Válaszát indokolja!

2. Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza 3 cm, a vele szemközti szög 18,5°. Mekkora a másik befogó?

3. Egy derékszögű háromszög átfogója 4,7 cm hosszú, az egyik hegyesszöge 52,5°. Hány cm hosszú a szög melletti befogó? Készítsen vázlatot az adatok feltüntetésével! Válaszát egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!

4. a) Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, az átfogója 13 cm hosszú. Mekkorák a háromszög hegyesszögei? (Válaszát egész fokra kerekítve adja meg!)
c) Az ABC derékszögű háromszög AC befogója 6 cm, BC befogója 8 cm hosszú. Számítsa ki az ABC háromszög hegyesszögeinek nagyságát!
d) A DEF derékszögű háromszög DE befogója 7 cm-rel rövidebb, mint a DF befogó. Az átfogó 2 cm-rel hosszabb, mint a DF befogó. Számítsa ki a DEF háromszög oldalainak hosszát és hegyesszögeinek nagyságát!

5. a) Egy torony árnyéka a vízszintes talajon kétszer olyan hosszú, mint a torony magassága.
Hány fokos szöget zár be ekkor a Nap sugara a vízszintes talajjal? A keresett szöget egészre kerekítve adja meg!
b) A vízszintessel 6,5°-ot bezáró egyenes út végpontja 124 méterrel magasabban van, mint a kiindulópontja. Hány méter hosszú az út? Válaszát indokolja!

6. Valamely derékszögű háromszög területe 12 cm^2, az α hegyesszögéről pedig tudjuk, hogy
$\operatorname{tg} \alpha = 3/2$
a) Mekkorák a háromszög befogói?
b) Mekkorák a háromszög szögei, és mekkora a köré írt kör sugara?
(A szögeket fokokban egy tizedesjegyre, a kör sugarát centiméterben szintén egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

7. Egy négyzet és egy rombusz egyik oldala közös, a közös oldal 13 cm hosszú. A négyzet és a rombusz területének az aránya 2:1.

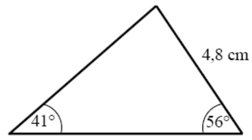
a) Mekkora a rombusz magassága?

b) Mekkorák a rombusz szögei?

c) Milyen hosszú a rombusz hosszabbik átlója? A választ két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

8. Az *ABCD* húrtrapéz oldalainak hossza: *AB* = 5 cm, *BC* = 2,5 cm, *CD* = 2 cm és *DA* = 2,5 cm. Számítsa ki a trapéz szögeit!

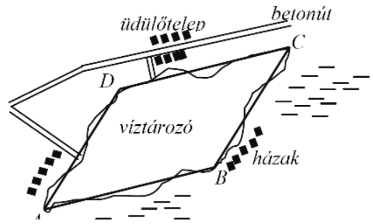
Általános háromszög



1. Az ábrán látható háromszögben hány cm hosszú az 56°-os szöggel szemközti oldal? (Az eredményt egy tizedes jegy pontossággal adja meg!)

2. A következő kérdések ugyanarra a 20 oldalú szabályos sokszögre vonatkoznak.

d) Milyen hosszú a legrövidebb átló, ha a szabályos sokszög beírt körének sugara 15 cm?



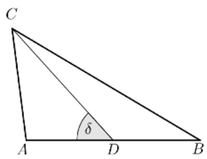
3. Egy víztározó víztükrének alakját az ábrán látható módon az *ABCD* paralelogrammával közelítjük.

A paralelogrammának az 1 : 30 000 méretarányú térképen mért adatai:
AB = 4,70 cm, *AD* = 3,80cm és *BD* = 3,30 cm.

a) A helyi önkormányzat olyan kerékpárút építését tervezi, amelyen az egész víztározót körbe lehet kerekezni. Hány km hosszúságú lesz ez az út, ha hossza kb. 25%-kal több a paralelogramma kerületénél? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

b) Mekkora az a legnagyobb távolság, amelyet motorcsónakkal, irányváltoztatás nélkül megtehetünk a víztározó víztükrén? Válaszát km-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

c) Körülbelül hány m^3-rel lesz több víz a víztározóban, ha a vízszintet 15 cm-rel megemelik? Válaszát ezer m^3-re kerekítve adja meg!



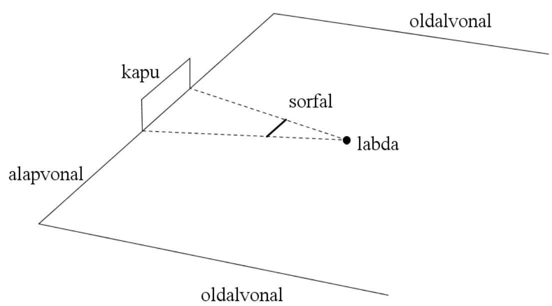
4. Az ábrán látható *ABC* háromszögben a *D* pont felezi az *AB* oldalt.
AB = 48 mm, *CD* = 41 mm, $\delta = 47°$.

a) Számítsa ki az *ABC* háromszög területét!

b) Számítással igazolja, hogy (egész milliméterre kerekítve) a háromszög *BC* oldalának hossza 60 mm!

c) Számítsa ki a háromszög *B* csúcsánál lévő belső szög nagyságát!

5. Egy szabadrúgás alkalmával a kapu két kapufájától éppen 26, illetve 33 méterre van a labda. A kapu szélessége 7,32 méter. Mekkora szögben látja a kapu szélességét Barnabás, aki a labdánál áll? Válaszát egész fokra kerekítve adja meg!



Érettségi feladatok: Koordináta-geometria

Vektor

1. Adottak az ***a*** (4; 3) és ***b*** (–2; 1) vektorok.

a) Adja meg az ***a*** hosszát! **b)** Számítsa ki az ***a*** + ***b*** koordinátáit!

2. Adottak az ***a*** = (6; 4) és az ***a*** – ***b*** = (11; 5) vektorok. Adja meg a ***b*** vektort a koordinátával!

3. Az *A*(− 7 ; 12) pontot egy ***r*** vektorral eltolva a *B*(5 ; 8) pontot kapjuk. Adja meg az ***r*** vektor koordinátáit!

Szakasz

4. Adott az *A* (2; –5) és *B* (1; 3) pont. Határozza meg az *AB* szakasz felezőpontjának koordinátáit!

5. Adott két pont: $A\left(-4;\frac{1}{2}\right)$ és $B\left(1;\frac{3}{2}\right)$. Írja fel az *AB* szakasz felezőpontjának koordinátáit!

Egyenes

6. Adott egy háromszög három csúcspontja a koordinátáival: $A(-4; -4)$, $B(4; 4)$ és $C(-4; 8)$. Számítsa ki a C csúcsból induló súlyvonal és az A csúcsból induló magasságvonal metszéspontjának koordinátáit!
7. Írja fel a $(-2; 7)$ ponton átmenő $\boldsymbol{n}$ $(5; 8)$ normálvektorú egyenes egyenletét!
8. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P_0\,(3; -5)$ ponton és párhuzamos a $4x + 5y = 0$ egyenletű egyenessel!
9. Adja meg az $5x - 3y = 2$ egyenletű egyenes és az y tengely metszéspontjának koordinátáit!
10. Ábrázolja koordináta-rendszerben az e egyenest, melynek egyenlete $4x+3y = -11$.
a) Számítással döntse el, hogy a P (100; –136) pont rajta van-e az egyenesen!
b) Az egyenesen levő Q pont ordinátája 107. Számítsa ki a Q pont abszcisszáját !
11. Adja meg a $3x + 2y = 18$ egyenletű egyenes és az y tengely metszéspontjának koordinátáit!
12. Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: A(0; 0), B(–2; 4), C(4; 5).
a) Írja fel az AB oldal egyenesének egyenletét!
b) Számítsa ki az ABC háromszög legnagyobb szögét! A választ tized fokra kerekítve adja meg!
c) Számítsa ki az ABC háromszög területét!
13. Három egyenes egyenlete a következő (a és b valós számokat jelölnek):
e: $y = -2x + 3$
f: $y = ax - 1$
g: $y = bx - 4$
Milyen számot írjunk az a helyére, hogy az e és f egyenesek párhuzamosak legyenek?
Melyik számot jelöli b, ha a g egyenes merőleges az e egyenesre?
14. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-3;2)$, $B(3;2)$ és $C(0;0)$.
Számítsa ki az ABC háromszög szögeit!
15. Adott két egyenes: $e: 5x - 2y = -14{,}5$, $f: 2x + 5y = 14{,}5$.
a) Határozza meg a két egyenes P metszéspontjának koordinátáit!
b) Igazolja, hogy az e és az f egyenesek egymásra merőlegesek!
c) Számítsa ki az e egyenes x tengellyel bezárt szögét!
16. Írja fel annak az e egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos a $2x - y = 5$ egyenletű f egyenessel és áthalad a $P(3; -2)$ ponton! Válaszát indokolja!
17. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2; -1)$, $B(9; -3)$ és $C(-3; 6)$.
a) Írja fel a BC oldal egyenesének egyenletét!
b) Számítsa ki a BC oldallal párhuzamos középvonal hosszát!
c) Számítsa ki a háromszögben a C csúcsnál lévő belső szög nagyságát!
18. Adja meg a $2x + y = 4$ egyenletű egyenes és az x tengely M metszéspontjának a koordinátáit, valamint az egyenes meredekségét!
19. A PQR háromszög csúcsai: $P(-6; -1)$, $Q(6; -6)$ és $R(2; 5)$.
a) Írja fel a háromszög P csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét!
b) Számítsa ki a háromszög P csúcsnál lévő belső szögének nagyságát!

Kör

20. Egy kör sugarának hossza 4, középpontja a (–3; 5) pont. Írja fel a kör egyenletét!
21. Adott a síkon az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű kör.
a) Állapítsa meg, hogy az A (7; 7) pont illeszkedik-e a körre!
b) Határozza meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát!
22.a) Írja fel az AB átmérőjű kör egyenletét, ahol $A(-5; 3)$ és $B(1; -5)$.
Számítással döntse el, hogy az S (1; 3) pont rajta van-e a körön!
b) Adja meg az ABC háromszög C csúcsának koordinátáit, ha tudja, hogy az S (1; 3) pont a háromszög súlypontja!
23. Adott a koordináta-rendszerben az $A(9; -8)$ középpontú, 10 egység sugarú kör.
Írja fel a kör $P(1; -2)$ pontjában húzható érintőjének egyenletét! Adja meg ennek az érintőnek az iránytangensét (meredekségét)!

Érettségi feladatok: Kombinatorika

1. Anna, Bori és Cili moziba mennek. Hányféle sorrendben ülhetnek le egymás mellé? Írja le a megoldás menetét!

2. A szóbeli érettségi vizsgán az osztály 22 tanulója közül az első csoportba öten kerülnek.

a) Hányféleképpen lehet a 22 tanulóból véletlenszerűen kiválasztani az első csoportba tartozókat?

Először mindenki történelemből felel.

b) Hányféle sorrendben felelhet történelemből az 5 kiválasztott diák?

3. A 4×100-as gyorsváltó házi versenyén a döntőbe a Delfinek, a Halak, a Vidrák és a Cápák csapata került.

a) Hányféle sorrend lehetséges közöttük, ha azt biztosan tudjuk, hogy nem a Delfinek csapata lesz a negyedik?

b) A verseny után kiderült, hogy az élen kettős holtverseny alakult ki, és a Delfinek valóban nem lettek az utolsók. Feltéve, hogy valakinek csak ezek az információk jutottak a tudomására, akkor ennek megfelelően hányféle eredménylistát állíthatott össze?

4. Egy iskolának mind az öt érettségiző osztálya 1-1 táncot mutat be a szalagavató bálon.

Az A osztály palotást táncol, ezzel indul a műsor. A többi tánc sorrendjét sorsolással döntik el. Hányféle sorrend alakulhat ki? Válaszát indokolja!

5. A hatoldalú gúla oldallapjait hat különböző színnel festik be úgy, hogy 1-1 laphoz egy színt használnak. Hányféle lehet ez a színezés? (Két színezést akkor tekintünk különbözőnek, ha forgatással nem vihetők át egymásba.)

6. Hány különböző háromjegyű pozitív szám képezhető a 0, 6, 7 számjegyek felhasználásával?

7. Egy szellemi vetélkedő döntőjébe 20 versenyzőt hívnak be. A zsűri az első három helyezettet és két további különdíjast fog rangsorolni. A rangsorolt versenyzők oklevelet és jutalmat kapnak.

a) Az öt rangsorolt versenyző mindegyike ugyanarra a színházi előadásra kap egy-egy jutalomjegyet. Hányféle kimenetele lehet ekkor a versenyen a jutalmazásnak?

b) A dobogósok három különböző értékű könyvutalványt, a különdíjasok egyike egy színházjegyet, a másik egy hangversenyjegyet kap. Hányféle módon alakulhat ekkor a jutalmazás?

c) Ha már eldőlt, kik a rangsorolt versenyzők, hányféle módon oszthatnak ki nekik jutalmul öt különböző verseskötetet?

8. Egy négytagú társaság e-mail kapcsolatban van egymással. Bármelyikük egy-egy társának legfeljebb egy levelet ír hetente. Válassza ki a felsorolt lehetőségek közül, hogy maximum hány levelet írhatott összesen egymásnak a társaság 4 tagja 1 hét alatt?

Válaszát indokolja!

a) $4 \cdot 4 = 16$

b) $4 \cdot 3 = 12$

c) $4 \cdot 3 /2 = 6$

9. A 12. évfolyam tanulói magyarból próba érettségit írtak. Minden tanuló egy kódszámot kapott, amely az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekből mindegyiket pontosan egyszer tartalmazta valamilyen sorrendben.

Hány tanuló írta meg a dolgozatot, ha az összes képezhető kódszámot mind kiosztották?

10. Októberben az iskolában hat osztály nevezett be a focibajnokságra egy-egy csapattal.

Hány mérkőzést kell lejátszani, ha mindenki mindenkivel játszik, és szerveznek visszavágókat is?

11. Háromjegyű számokat írtunk fel a 0; 5 és 7 számjegyekkel. Írja fel ezek közül azokat, amelyek öttel oszthatók, és különböző számjegyekből állnak!

12. A piacon az egyik zöldséges pultnál hétféle gyümölcs kapható. Kati ezekből háromfélét vesz, mindegyikből 1-1 kilót. Hányféle összeállításban választhat Kati? (A választ egyetlen számmal adja meg!)

13. Hány olyan háromjegyű szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, amelyikben csupa különböző számjegyek szerepelnek?

14. Szabó nagymamának öt unokája van, közülük egy lány és négy fiú. Nem szeret levelet írni, de minden héten ír egy-egy unokájának, így öt hét alatt mindegyik unoka kap levelet.

a) Hányféle sorrendben kaphatják meg az unokák a levelüket az öt hét alatt?

b) Ha a nagymama véletlenszerűen döntötte el, hogy melyik héten melyik unokájának írt levél következik, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy lányunokája levelét az ötödik héten írta meg?

15. Egy 7-tagú társaságban mindenki mindenkivel egyszer kezet fogott. Hány kézfogás történt?

16. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával ötjegyű számokat készítünk az összes lehetséges módon (egy számjegyet többször is felhasználhatunk). Ezek között hány olyan szám van,
a) amely öt azonos számjegyből áll;
b) amelyik páros;
c) amelyik 4-gyel osztható?
17. A 9.B osztály létszáma 32 fő. Közülük először egy osztálytitkárt, majd egy titkárhelyettest választanak. Hányféleképpen alakulhat a választás kimenetele?
18. Annának kedden 5 órája van, mégpedig matematika (M), német (N), testnevelés (T), angol (A) és biológia (B). Tudjuk, hogy a matematikaórát testnevelés követi, és az utolsó óra német.
Írja le Anna keddi órarendjének összes lehetőségét!
19. Egy baráti társaság minden tagja írt egy-egy SMS üzenetet a társaság minden további tagjának. Így mindenki 11 üzenetet írt. Hány SMS-t írtak egymásnak összesen a társaság tagjai?
20. a) Hány olyan négy különböző számjegyből álló négyjegyű számot tudunk készíteni, amelynek mindegyik számjegye eleme az {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7} halmaznak?
b) Hány 4-gyel osztható hétjegyű szám alkotható az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből?
c) Hány olyan hatjegyű, hárommal osztható szám írható fel, amely csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket tartalmazza, és e számjegyek mindegyike legalább egyszer előfordul benne?
21. Döntse el, az állítás igaz vagy hamis! Hét tanulóból négyet ugyanannyiféleképpen lehet kiválasztani, mint hármat, ha a kiválasztás sorrendjétől mindkét esetben eltekintünk.
22. Egy érettségiző osztály félévi matematika osztályzatai között elégtelen nem volt, de az összes többi jegy előfordult. Legkevesebb hány tanulót kell kiválasztani közülük, hogy a kiválasztottak között biztosan legyen legalább kettő, akinek azonos volt félévkor a matematika osztályzata?
23. András, Balázs, Cili, Dóra és Enikő elhatározták, hogy sorsolással döntenek arról, hogy közülük ki kinek készít ajándékot. Úgy tervezték, hogy a neveket ráírják egy-egy papírcetlire, majd a lefelé fordított öt cédulát összekeverik, végül egy sorban egymás mellé leteszik azokat az asztalra. Ezután, keresztnevük szerinti névsorban haladva egymás után vesznek el egy-egy cédulát úgy, hogy a soron következő mindig a bal szélső cédulát veszi el.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy az elsőnek húzó Andrásnak a saját neve jut?
b) Írja be az alábbi táblázatba az összes olyan sorsolás eredményét, amelyben csak Enikőnek jut a saját neve!
A táblázat egyes soraiban az asztalon lévő cédulák megfelelő sorrendjét adja meg!
(A megadott táblázat sorainak a száma lehet több, kevesebb vagy ugyanannyi, mint a felsorolandó esetek száma. Ennek megfelelően hagyja üresen a felesleges mezőket, vagy egészítse ki újabb mezőkkel a táblázatot, ha szükséges!)

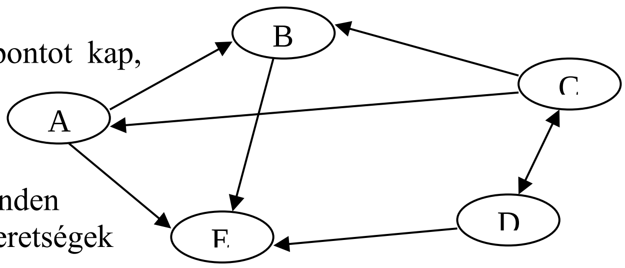
A cédulák megfelelő sorrendjei	A húzó neve				
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
					E
					E
					E
					E
					E
					E

A cédulák megfelelő sorrendjei	A húzó neve				
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
					E
					E
					E
					E
					E
					E

c) Az ajándékok átadása után mind az öten moziba mentek, és a nézőtéren egymás mellett foglaltak helyet. Hány különböző módon kerülhetett erre sor, ha tudjuk, hogy a két fiú nem ült egymás mellett?

Érettségi feladatok: Gráfok

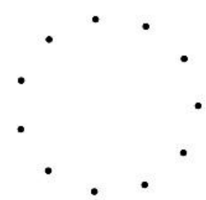
1. Egy iskolai bajnokságban 5 csapat körmérkőzést játszik. (Mindenki mindenkivel egyszer játszik.) Az ábra az eddig lejátszott mérkőzéseket mutatja. A nyíl mindig a győztes felé mutat. Döntetlen esetén az összekötő vonal mindkét végén nyíl van.
A csapat győzelem esetén 2 pontot, döntetlen esetén 1 pontot kap, vereség esetén pedig nem kap pontot.
a) Kinek hány pontja van ebben a pillanatban?
b) Hány mérkőzés van még hátra?



2. Egy öttagú társaságban a házigazda mindenkit ismer, minden egyes vendége pedig pontosan két embert ismer. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Szemléltesse rajzzal az ismeretségeket!

3. Egy sakkverseny döntőjébe 5 versenyző jutott be. Közülük 1 versenyző mindegyik társát ismeri, a többiek pedig egyenként 2-2 személyt ismernek a döntő résztvevői közül. Szemléltesse rajzzal (gráf alkalmazásával) az ismeretségeket, ha az ismeretségek kölcsönösek!
4. Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma 4; 3; 3; 2; 2.
5. A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andráson kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl.
a) Szemléltesse gráffal a lejátszott mérkőzéseket!
b) Hány mérkőzés van még hátra?
c) Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a hat versenyző közül Dani az első két hely valamelyikén végez?
6. A diákönkormányzat újonnan választott négytagú vezetősége: Kata, Mari, Réka és Bence. Közülük Kata három, Réka és Bence pedig két-két vezetőségi tagot ismert korábbról. Mari a négyes csoportnak csak egy tagját ismerte. (Az ismeretségek kölcsönösek.)
Rajzolja fel a négytagú vezetőség választás előtti ismeretségi gráfját!
7. Rajzoljon le egy 4 pontú egyszerű gráfot, amelyben a pontok fokszáma rendre 3, 2, 2, 1!
8. Térgeometriai feladatok megoldásában segíthet egy olyan készlet, melynek elemeiből (kilyuggatott kisméretű gömbökből és különböző hosszúságú műanyag pálcikákból) matematikai
és kémiai modellek építhetők
Anna egy molekulát modellezett a készlet segítségével, ehhez 7 gömböt és néhány pálcikát használt fel. Minden pálcika két gömböt kötött össze, és bármely két gömböt legfeljebb egy pálcika kötött össze. A modell elkészítése után feljegyezte, hogy hány pálcikát szúrt bele az egyes gömbökbe. A feljegyzett adatok: 6, 5, 3, 2, 2, 1, 1.
a.) Mutassa meg, hogy Anna hibát követett el az adatok felírásában!

Anna is rájött, hogy hibázott. A helyes adatok: 6, 5, 3, 3, 2, 2, 1.
b.) Hány pálcikát használt fel Anna a modell elkészítéséhez?
8. Rajzoljon egy gráfot, melynek 5 csúcsa és 5 éle van, továbbá legalább az egyik csúcsának a fokszáma 3.
9. Egy iskola asztalitenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.
a) Rajzolja le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját!
b) Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta?
(**Igen** válasz esetén rajzoljon egy megfelelő gráfot; **nem** válasz esetén válaszát részletesen indokolja!)
c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a hat játékos közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, ők eddig még nem játszották le az egymás elleni mérkőzésüket!
10. Egy focicsapat 11 játékosa megérkezik az edzésre, néhányan kezet fognak egymással. (Két játékos között legfeljebb egy kézfogás történik.) Az edző felírta, hogy ki hányszor fogott kezet, és a következő számokat kapta: 0; 1; 2; 2; 2; 5; 0; 0; 4; 4; 2.



a) Ábrázolja a kézfogásoknak egy lehetséges gráfját, ahol a pontok a játékosokat jelölik, és két pont között akkor van él, ha az illetők kezet fogtak az edzés előtt!
b) Hány kézfogás történt összesen?
11. Az iskolai asztalitenisz bajnokságon heten indulnak. Mindenki mindenkivel egyszer játszik. Mostanáig Anita már mind a 6 mérkőzését lejátszotta, Zsuzsa 2, Gabi, Szilvi, Kati és Orsi pedig 1-1 mérkőzésen vannak túl. Hány mérkőzését játszotta le mostanáig a bajnokság hetedik résztvevője, Flóra?

Érettségi feladatok: Valószínűség számítás

1. Egy dobozban 5 piros golyó van. Hány fehér golyót tegyünk hozzá, hogy a fehér golyó húzásának valószínűsége 80% legyen? Válaszát indokolja!
2. Egy rendezvényen 150 tombolajegyet adtak el. Ági 21-et vásárolt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Ági nyer, ha egy nyereményt sorsolnak ki? (A jegyek nyerési esélye egyenlő.)
3. Egy lakástextil üzlet egyik polcán 80 darab konyharuha van, amelyek közül 20 darab kockás. Ha véletlenszerűen kiemelünk egy konyharuhát, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy az kockás?

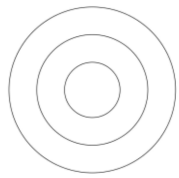
4. A jonatán alma mérete kisebb, mint az idaredé, így abból átlagosan 25%-kal több darab fér egy ládába, mint az idaredből. Rakodásnál mindkét fajtából kiborult egy-egy tele láda alma, és tartalmuk összekeveredett.
A kiborult almákból véletlenszerűen kiválasztva egyet, mekkora a valószínűsége annak, hogy az jonatán lesz?
5. 32 tanuló jár az A osztályba, 28 pedig a B-be. Egy ünnepélyen a két osztályból véletlenszerűen kiválasztott 10 tanulóból álló csoport képviseli az iskolát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a két osztályból pontosan 5–5 tanuló kerül a kiválasztott csoportba?
6. Egy iskola sportegyesületében 50 kosaras sportol, közülük 17 atletizál is. Ebben az iskolában véletlenszerűen kiválasztunk egy kosarast. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló atletizál is?
7. Egy öttagú társaság egymás után lép be egy ajtón. Mekkora a valószínűsége, hogy Anna, a társaság egyik tagja, elsőnek lép be az ajtón?
8. Egy kétforintos érmét kétszer egymás után feldobunk, és feljegyezzük az eredményt.
Háromféle esemény következhet be:
A esemény: két fejet dobunk.
B esemény: az egyik dobás fej, a másik írás.
C esemény: két írást dobunk.
Mekkora a *B* esemény bekövetkezésének valószínűsége?
9.a) Sorolja fel azokat a 200-nál nagyobb háromjegyű számokat, amelyeknek számjegyei a felírás sorrendjében növekvő számtani sorozat tagjai!
b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az **a)** kérdésben szereplő számok közül véletlenszerűen egyet kiválasztva, a kiválasztott szám osztható 9-cel!
10. Egy dobozban húsz golyó van, aminek 45 százaléka kék, a többi piros. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha találomra egy golyót kihúzunk, akkor az piros lesz?
11. Péter egy 100-nál nem nagyobb pozitív egész számra gondolt. Ezen kívül azt is megmondta Pálnak, hogy a gondolt szám 20-szal osztható. Mekkora valószínűséggel találja ki Pál elsőre a gondolt számot, ha jól tudja a matematikát?
12. Az autókereskedés parkolójában 1–25-ig számozott hely van. Minden beérkező autó véletlenszerűen kap parkolóhelyszámot.
a) Az üres parkolóba elsőként beparkoló autó vezetőjének szerencseszáma a 7. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kapott parkolóhelyszámnak van hetes számjegye, vagy a szám hétnek többszöröse?

Május 10-én az üres parkolóba 25 kocsi érkezik: 12 ezüstszínű ötajtós, 4 piros négyajtós, 2 piros háromajtós és 7 zöld háromajtós.
b) Az üres parkolóba már beálltak a négy és ötajtós autók. Hányféleképpen állhatnak be az üresen maradt helyekre a háromajtósak? (Az azonos színű autókat nem különböztetjük meg egymástól

A május 10-re előjegyzett 25 vevő az autó színére is megfogalmazta előzetesen a kívánságait. Négyen zöld kocsit rendeltek, háromnak a piros szín kivételével mindegyik megfelel, öten akarnak piros vagy ezüst kocsit, tízen zöldet vagy pirosat. Három vevőnek mindegy, milyen színű kocsit vesz.
c) Színek szempontjából kielégíthető-e a május 10-re előjegyzett 25 vevő igénye az aznap reggel érkezett autókkal?

13. Egy zsákban nyolc fehér golyó van. Hány fekete golyót kell a zsákba tenni, hogy – véletlenszerűen kiválasztva egy golyót –, fehér golyó kiválasztásának 0,4 legyen a valószínűsége, ha bármelyik golyót ugyanakkora valószínűséggel választjuk?
14. Béla egy fekete és egy fehér színű szabályos dobókockával egyszerre dob. Feljegyzi azt a kétjegyű számot, amelyet úgy kap, hogy a tízes helyiértéken a fekete kockával dobott szám, az egyes helyiértéken pedig a fehér kockával dobott szám áll.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy a feljegyzett kétjegyű szám
a) négyzetszám;
b) számjegyei megegyeznek;
c) számjegyeinek összege legfeljebb 9?
15. Az alábbi kilenc szám közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám **nem negatív**? –3,5; –5; 6; 8,4; 0; –2,5; 4; 12; –11

16. A héten az ötös lottón a következő számokat húzták ki: 10, 21, 22, 53 és 87. Kata elújságolta Sárának, hogy a héten egy két találatos szelvénye volt. Sára nem ismeri Kata szelvényét, és arra tippel, hogy Kata a 10-est és az 53-ast találta el. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Sára tippje helyes?
Válaszát indokolja!
17. A 2, 4 és 5 számjegyek mindegyikének felhasználásával elkészítjük az összes, különböző számjegyekből álló háromjegyű számot. Ezek közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kiválasztott szám páratlan? Válaszát indokolja!
18. Egy piros és egy sárga szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege pontosan *4* lesz? Válaszát indokolja!
19. Egy ajándéktárgyak készítésével foglalkozó kisiparos családi vállalkozása keretében zászlókat, kitűzőket is gyárt. Az ábrán az egyik általa készített kitűző stilizált képe látható.
A kitűzőn lévő három mező kiszínezéséhez 5 szín (piros, kék, fehér, sárga, zöld) közül választhat. Egy mező kiszínezéséhez egy színt használ, és a különböző mezők lehetnek azonos színűek is.
a) Hányféle háromszínű kitűzőt készíthet a kisiparos?
b) Hányféle kétszínű kitűző készíthető?



A kisiparos elkészíti az összes lehetséges különböző (egy-, két- és háromszínű) kitűzőt egy-egy példányban, és véletlenszerűen kiválaszt közülük egyet.
c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan kitűzőt választ, amelyen az egyik mező kék, egy másik sárga, a harmadik pedig zöld színű?

Érettségi feladatok: Számelmélet

Oszthatóság

1.a) Igaz-e, hogy 25 863 számjegyeit tetszőleges sorrendben felírva mindig hárommal osztható számot kapunk? (Válaszát indokolja!)
b) Gábor olyan sorrendben írja fel 25 863 számjegyeit, hogy a kapott szám néggyel osztható legyen. Milyen számjegy állhat a tízes helyiértéken? (Válaszát indokolja!)
2. a) Peti felírt egy hárommal osztható hétjegyű telefonszámot egy cédulára, de az utolsó jegy elmosódott. A barátja úgy emlékszik, hogy az utolsó jegy nulla volt. A kiolvasható szám: 314726_. Igaza lehetett-e Peti barátjának? Válaszát indokolja!
b) Melyik számjegy állhat a 258X2 ötjegyű számban az X helyén, ha a szám osztható 4-gyel?
3. Írja fel prímszámok szorzataként a 420-at!
4. Adja meg a 24 egyjegyű pozitív osztóinak halmazát!
5. Sorolja fel a 2010-nek mindazokat a pozitív osztóit, amelyek prímszámok!
7. Fogalmazza meg a hattal oszthatóság szabályát.

Prímtényezős felbontás, lnko, lkkt

6. Írja fel 24 és 80 legkisebb közös többszörösét! Számítását részletezze!
7. Adottak a következő számok: $a = 2^3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11^4$ és $b = 2\cdot 5^2\cdot 11^3\cdot 13$.
Írja fel a és b legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét! A kért számokat elegendő prímtényezős alakban megadni.

Számrendszerek

8. Írja fel hármas számrendszerben a 100_{10} számot!
9. Írja fel tízes számrendszerben az 101011_{2} számot!